Обучението по математика и информатика, брой 4, 1991 г.

Реплика

ПО ПОВОД НА ЕДНА ЗАДАЧА

Митко Кунчев, МГ „Баба Тонка” - Русе

На 30.09.1990 г. в ИПКУ, Варна се проведе изпит по математика с кандидатите за втори клас-квалификация. В предложената тема фигурираше и следната

Задача. Да се определи видът на триъгълник, ако $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$ и $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ са последователни естествени числа.

Спирам се на тази задача, защото проблемът, който третира, е познат. Например в „Сборник от задачи по геометрия 7. – 10. клас” под редакцията на Г. Станилов от 1986 г. на с. 151 намираме следните задачи:

38. Да се докаже, че страните a, b, c на триъгълник със съответни срещулежащи ъгли α, β, γ образуват аритметична прогресия тогава и само тогава, когато

$$cot\,g\frac{\alpha}{2}.cot\,g\frac{\gamma}{2}=3.$$

39. Ако $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$ и $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ са естествени числа, образуващи аритметична прогресия, да се определи видът на триъгълника и отношението на страните му.

Нека формулираме следните твърдения:

I. Страните на триъгълник - a, b, c образуват аритметична прогресия ($2b=a+c$).

II. $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$, $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ образуват аритметична прогресия.

III. $cot\,g\frac{\alpha}{2}.cot\,g\frac{\gamma}{2}=3$.

За да изясним възможността за определяне вида на триъгълника най-напред ще докажем, че тези твърдения са еквивалентни. Ще започнем с I. $\Leftrightarrow$ II., като използваме формулите на Ойлер:

$$cot\,g\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}\ ;\ cot\,g\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}}\ ;\ cot\,g\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}.$$

Числата $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$, $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ образуват аритметична прогресия тогава и само тогава, когато:

$$2\,cot\,g\frac{\beta}{2}=cot\,g\frac{\alpha}{2}+cot\,g\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-c)(p-b)}}+\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(p-b)=p-a+p-c\Leftrightarrow 2b=a+c.$$

Последното е изпълнено тогава и само тогава, когато a, b, c образуват аритметична прогресия. С това I. $\Leftrightarrow$ II. е доказано.

Да докажем II. $\Leftrightarrow$ III. Отново имаме, че

$$2\,cot\,g\frac{\beta}{2}=cot\,g\frac{\alpha}{2}+cot\,g\frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

От друга страна от $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ следва, че

(2) $$\cot g\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\cot g\left(90^0-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{\cot g\frac{\beta}{2}}.$$

От формулите за сбор от ъгли имаме

(3) $$\cot g\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\cot g\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}-1}{\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}}.$$

От (2) и (3) получаваме

$$\frac{1}{\cot g\frac{\beta}{2}}=\frac{coyg\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}-1}{\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cot g\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}=3 \quad .$$

С това II. $\Leftrightarrow$ III. е доказано. Сега I. $\Leftrightarrow$ III. следва логически, но то може да се докаже и директно, пак с формулите на Ойлер.

$$\cot g\frac{\alpha}{2}.\cot g\frac{\gamma}{2}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p}{p-b}=3 \quad \Leftrightarrow \quad 3b=2p \quad \Leftrightarrow \quad 2b=a+c.$$

Така получихме, че I. $\Leftrightarrow$ II. $\Leftrightarrow$ III. $\Leftrightarrow$ I.

Да се върнем на въпроса за определяне вида на триъгълника. Очевидно твърдението II. не е достатъчно, за да се получи информация за него, тъй като води само до известното вече равенство $2b=a+c$. За това да допълним II. по следния начин:

„$\cot g\frac{\alpha}{2}$, $\cot g\frac{\beta}{2}$, $\cot g\frac{\gamma}{2}$ са естествени числа, образуващи аритметична прогресия”.

Сега имаме

$$2\cot g\frac{\beta}{2}=\cot g\frac{\alpha}{2}+\cot g\frac{\gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cot g\frac{\alpha}{2}.\cot g\frac{\gamma}{2}=3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cot g\frac{\alpha}{2}=1\wedge cogt\frac{\gamma}{2}=3\right)\vee\left(\cot g\frac{\alpha}{2}=3\wedge\cot g\frac{\gamma}{2}=1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha=90^0\vee\gamma=90^0.$$

Да разгледаме и друг вариант на твърдението II.:

„$\cot g\frac{\alpha}{2}$, $\cot g\frac{\beta}{2}$, $\cot g\frac{\gamma}{2}$ са три последователни естествени числа”.

Видът на триъгълника може да се определи както по-горе, защото три последователни естествени числа винаги образуват аритметична прогресия, но може и директно:

Нека $\cot g\frac{\alpha}{2}=n;\ \cot g\frac{\beta}{2}=n+1;\ \cot g\frac{\gamma}{2}=n+2;\ n\in N$. Тогава

$$n+1=\cot g\frac{\beta}{2}=tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg\frac{\alpha}{2}.tg\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n(n+2)}} \quad \Leftrightarrow$$

$$n+1=\frac{n+2+n}{n(n+2)-1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)(n^2+2n-1)=2(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad n=1 \quad (n\in N),\text{ т. е. } \alpha=90^0.$$

Интересното в случая е, че изискването $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$, $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ да са естествени числа е достатъчно силно и само от него може да се определи видът на триъгълника. Да разгледаме следната

Задача. Да се определи видът на триъгълник, ако $cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$, $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ са различни естествени числа.

Решение. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$180^0 > \alpha > \beta > \gamma > 0^0, \text{ т. е. } 90^0 > \frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2} > \frac{\gamma}{2} > 0^0 \text{ и } 0 < cot\,g\frac{\alpha}{2} < cot\,g\frac{\beta}{2} < cot\,g\frac{\gamma}{2}.$$

Възможни са следните два случая:

1. $cot\,g\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \Rightarrow$ триъгълникът е правоъгълен.

2. $cot\,g\frac{\alpha}{2} \geq 2$ (котангенсите са естествени числа по условие).

Тъй като $2 > \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad cot\,g\frac{\alpha}{2} \geq 2 > \sqrt{3} = cot\,g30^0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 60^0$.

Но $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow 60^0 > \alpha > \beta > \gamma \Rightarrow 180^0 > \alpha + \beta + \gamma$. Последното е невярно и следователно единствената възможност остава $cot\,g\frac{\alpha}{2} = 1$, т. е. триъгълникът е правоъгълен.

Изводи:

1. Условието II. не е достатъчно за определяне вида на триъгълника.
2. Твърдението „$cot\,g\frac{\alpha}{2}$, $cot\,g\frac{\beta}{2}$, $cot\,g\frac{\gamma}{2}$ са естествени числа” е достатъчно, за да се определи видът на триъгълника.